М А Т Е М А Т И К А

УДК 514.126 + 531

А. И. Долгарев

ПОЛУЧЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ ПО ЕЕ КРИВИЗНЕ

Аннотация. Статья посвящена методам получения траекторий движения и уравнениям кривых трехмерного галилеева пространства-времени по полю ускорения. Она использует методы 3-мерной геометрии Галилея пространства-времени. Рассмотрен ряд примеров.

Ключевые слова: траектория движения, ускорение, галилеевы методы.

Abstract. The paper is devoted to the methods of obtaining of the mechanical trajectory and equation of curves three dimensional Galilean space-time by acceleration's field. It was used methods of geometry 3D Galilean space-time. We consider a number of examples.

Keyword: trajectory of motion, acceleration, Galilean methods.

Рассматривается движение материальной точки с двумя степенями свободы. К изучению траекторий точек и закона их движения привлекаются методы 3-мерной геометрии Галилея. Мировая линия движения точки описывается галилеевой векторной функцией; траектория движения есть проекция мировой линии на евклидову плоскость пространства-времени Галилея, пространственная составляющая мировой линии движения является законом кинематического движения материальной точки. 3-мерное пространство-время Галилея $\mathbf{\Gamma}^3$ является прямой суммой

$$\mathbf{\Gamma}^3 = \mathbf{R} + \mathbf{E}^2$$

1-мерной оси времени, совпадающей с действительной числовой осью $\mathbf{R}$, и евклидовой плоскости $\mathbf{E}^2$.

Пространство-время Галилея размерности 3 изучается в [1], где рассмотрено галилеево скалярное произведение векторов и на аффинном пространстве определено пространство-время Галилея; содержится теория кривых и поверхностей. В работе [2] средствами галилеевой геометрии найдены законы движения материальной точки по заданному полю ускорений движения. К этой задаче примыкает задача написания параметрических уравнений кривой пространства Галилея по функциям их кривизны и кручения. В настоящей работе обоснованы различные методы решения указанной задачи, близкие к методам в [2, 3], где рассматриваются кривые 3-мерных одулярных галилеевых пространств. Получены галилеевы кривые по их кривизне и по кривизне их евклидовой проекции и методом разложения в степенной ряд. Рассмотрены случаи, в которых кривизна и кручение кривой постоянны, рациональны, трансцендентны. В частности получены: цикл, циклоида, параболы различной степени, окружность, развертка окружности, цепная линия, коническая спираль, астроида, кривая Штейнера и др.; их кривизна и кручение совпадают с заданными функциями. Отмечены случаи, когда кривизна и кручение кривой являются колебаниями, тогда пространственные компоненты кривой также являются колебаниями, но с другими параметрами.

1 Кривая пространства Галилея размерности 3

Для получения уравнений траектории движущейся материальной точки и закона движения по траектории используются методы геометрии Галилея. Приведем из [1] необходимые геометрические сведения.

1.1 Пространство-время Галилея $\mathbf{\Gamma}^3$

Векторы 3-мерного действительного линейного пространства записываем в виде

$$\vec{x} = (x, x^1, x^2)$$

с выделением первой компоненты.

Галилеева норма вектора согласно [1] равна

$$|\vec{x}| = \begin{cases} |x|, \text{ если } x \neq 0, \\ \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \text{ если } x = 0. \end{cases}$$

Свойства галилеевой нормы отличаются от свойств евклидовой нормы. Например, для галилеевой нормы не выполняется неравенство треугольника. Первая компонента x вектора $\vec{x}$ является временной, смысл этой компоненты – время; компоненты x^1, x^2 – пространственные. Векторы $(0, x^1, x^2)$ имеют евклидову норму. Если $x \neq 0$, то векторы (x, x^1, x^2) называются галилеевыми; а векторы $(0, x^1, x^2)$ называются евклидовыми, они еще записываются в виде $\vec{r} = (x^1, x^2)$. Всякий галилеев вектор перпендикулярен всякому евклидову вектору.

Аффинное пространство, в линейном пространстве которого определена галилеева норма векторов, называется пространством Галилея; 3-мерное пространство Галилея обозначается $\mathbf{\Gamma}^3$. Две точки $A = (a, a^1, a^2)$ и $B = (b, b^1, b^2)$ пространства Галилея определяют вектор

$$\overline{AB} = (b - a, b^1 - a^1, b^2 - a^2),$$

его норма равна

$$|AB| = \begin{cases} |b - a|, \text{ если } b \neq a, \\ \sqrt{(b^1 - a^1)^2 + (b^2 - a^2)^2}, \text{ если } b = a. \end{cases}$$

Точки пространства Галилея еще называются событиями. События A и B одновременны, если $a = b$. Тогда вектор $\overline{AB}$ евклидов. Одновременные между собой события составляют в пространстве Галилея $\mathbf{\Gamma}^3$ евклидову плоскость $\mathbf{E}^2$. Репер пространства Галилея есть $\mathbf{B} = (O, \vec{e}, \vec{i}, \vec{j})$, где O – начало отсчета; $\vec{e}$ – единичный вектор направления времени; $\vec{i}, \vec{j}$ – евклидовы единичные взаимно перпендикулярные векторы. Точка O и евклидовы векторы $\vec{i}, \vec{j}$ образуют евклидову плоскость $\mathbf{E}^2 = < O, \vec{i}, \vec{j} >$. Через всякую точку P пространства $\mathbf{\Gamma}^3$ проходит и единственная евклидова плоскость $< P, \vec{i}, \vec{j} >$.

1.2 Кривая пространства Галилея в естественной параметризации

Кривые пространства $\mathbf{\Gamma}^3$ изучаются в [1]. Регулярная кривая класса C^3 3-мерного пространства Галилея $\mathbf{\Gamma}^3$ в естественной параметризации задается галилеевой векторной функцией

$$\gamma(t) = (t, x(t), y(t)),\ t \in \mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}, \tag{1}$$

или в разложении по базисным векторам репера $\mathbf{B} = (O, \vec{e}, \vec{i}, \vec{j})$ пространства $\mathbf{\Gamma}^3$:

$$\gamma(t) = t\vec{e} + x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}. \tag{2}$$

Составляющая $t\vec{e}$ является временной, параметр t имеет смысл времени. Составляющая $x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ обозначается

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$

и является пространственной; $\vec{r}(t)$ является вектором евклидовой плоскости $< O, \vec{i}, \vec{j} >$ пространства Галилея $\mathbf{\Gamma}^3$. Кривая $\vec{r}(t)$ – это проекция галилеевой кривой $\gamma(t)$ (1) на евклидову плоскость $< O, \vec{i}, \vec{j} >$. Разложение (2) можно записать в виде

$$\gamma(t) = t\vec{e} + \vec{r}(t). \tag{3}$$

Вектор касательной к кривой (1) равен

$$\dot{\gamma}(t) = (1, \dot{x}(t), \dot{y}(t)). \tag{4}$$

Это галилеев вектор, его длина равна 1 согласно галилеевой норме векторов (п. 1.1):

$$|\dot{\gamma}| = |\dot{\gamma}(t)| = 1.$$

Кривизна кривой (1) вычисляется по формуле

$$k = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} \geq 0; \tag{5}$$

формула для вычисления кручения кривой (1) таков [1]:

$$m = \frac{\ddot{x} \quad \dddot{y} - \dddot{x} \quad \ddot{y}}{k^2}. \tag{6}$$

Если задана кривая (1) пространства Галилея $\mathbf{\Gamma}^3$, то определяются функции кривизны и кручения кривой:

$$k = k(t) \geq 0, \ m = m(t). \tag{7}$$

Эти функции являются натуральными уравнениями кривой (1). Функции кривизны и кручения (7) кривой связаны формулами (5), (6) с пространственными компонентами $x = x(t), y = y(t)$ кривой (1); имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = k^2(t), \\ \ddot{x}\dddot{y} - \dddot{x}\ddot{y} = m(t)k^2(t). \end{cases} \tag{8}$$

Если заданы функции (7), то функции $x = x(t), y = y(t)$ являются решениями системы дифференциальных уравнений (8). Частный случай системы дифференциальных уравнений (8) при $k = \text{const}$, $m = \text{const}$ решается в [1]; общий случай рассмотрен в [2]. Укажем еще один метод решения системы дифференциальных уравнений (8). Сначала приведем схему решения системы уравнений (8) из [2].

Вводятся обозначения

$$\ddot{x} = u, \ddot{y} = v, \tag{9}$$

что позволяет понизить порядок дифференциальных уравнений системы (8):

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = k^2, \\ u\dot{v} - \dot{u}v = mk^2. \end{cases} \tag{10}$$

Ее решение есть пара функций $u = u(t), v = v(t)$, затем, решая уравнения (9), находим функции $x = x(t), y = y(t)$.

По виду первого уравнения системы (10) обозначаем:

$$u = k\cos(w + c), \ v = k\sin(w + c), \tag{11}$$

где

$$w = w(t) = \int m(t)dt + c, \ \ c = \text{const}. \tag{12}$$

Функции (11) с условием (12) удовлетворяют второму уравнению системы (10). При этом уравнения (9) принимают вид

$$\ddot{x} = k\cos(w + c), \ \ddot{y} = k\sin(w + c). \tag{13}$$

После двукратного интегрирования этих уравнений находим компоненты $x(t), y(t)$ функции (1), задающей кривую пространства Галилея $\mathbf{\Gamma}^3$.

Интегрирование уравнений (13) может быть затруднено видом функции $w = w(t)$ в (12). В этом случае возможно использование альтернативной схемы решения системы дифференциальных уравнений (8). Иногда функция $k^2(t)$ представляется в виде суммы двух квадратов:

$$k^2(t) = k_1^2(t) + k_2^2(t). \tag{14}$$

Если функции

$$u = k_1(t)\,,\ v = k_2(t) \tag{15}$$

удовлетворяют второму уравнению системы (10), то дифференциальные уравнения

$$\ddot{x} = k_1(t)\,,\ \ddot{y} = k_2(t) \tag{16}$$

позволяют найти функции $x(t), y(t)$ – компоненты кривой (1).

Для получения единственной кривой (1) с заданными функциями кривизны и кручения (7) вводим начальные условия для системы дифференциальных уравнений (8)

$$t = t_0,\ x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)\,,\ \dot{x}_0 = \dot{x}(t_0), \dot{y}_0 = \dot{y}(t_0)\,. \tag{17}$$

2 Параметрические уравнения траекторий

Рассмотрим различные случаи решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8) с заданными функциями (7) $k = k(t) \ge 0$, $m = m(t)$, содержащимися в правых частях этих уравнений. В зависимости от вида функций (7) выбирается метод решения системы уравнений (8): либо общий метод из [2], либо альтернативный метод. Указан случай, в котором альтернативным методом воспользоваться не удается. В результате решения системы дифференциальных уравнений (8) отыскиваются параметрические уравнения мировой линии и траектории движущейся точки и кинематический закон движения материальной точки по ее траектории. Получается закон движения точки, так как параметром траектории точки является время. Галилеева кривизна траектории движения точки равна величине (модулю) вектора ускорения движения.

2.1 Кривизна и кручение траектории постоянны

Получим координатные задания траектории движения точки во времени по функциям кривизны и кручения мировой линии движения точки. Тем самым имеем закон движения точки.

Траектория 1. $k = 0$, $m = 0$.

Согласно (13) имеем дифференциальные уравнения

$$\ddot{x} = 0, \ddot{y} = 0\,.$$

Интегрируя их дважды, получаем общие решения

$$x = C_1 t + C_3\,,\ y = C_2 t + C_4\,.$$

Здесь и всюду ниже $C_i = \text{const}$. Найдем решение системы дифференциальных уравнений (8), удовлетворяющее начальным условиям

$$t = 0, x = 0, y = a = \text{const}, \dot{x} = 1, \dot{y} = -1\,.$$

По данным начальным условиям имеем

$$x = t, y = a - t\,.$$

Для линии

$$\gamma(t) = (t, t, a - t)$$

выполняются равенства $k = 0$, $m = 0$. Получена прямая пространства Галилея как мировая линия движения точки, ее евклидова проекция – прямая

$$x = t,\ y = a - t,$$

является траекторией движения точки.

Траектория 2. $k \neq 0$, $m = 0$.

По формуле (12) $w = c = \text{const}$, по (13):

$$\ddot{x} = k\cos c\,,\ \ \ddot{y} = k\sin c\,.$$

В случае $c = 0$ имеем

$$\ddot{x} = k\,,\ \ \ddot{y} = 0\,,$$

тогда

$$x = \frac{k}{2}t^2 + C_1 t + C_3\,,\ \ y = C_2 t + C_4\,.$$

В координатной галилеевой плоскости $< O, \vec{e}, \vec{i} >$ определяется семейство галилеевых циклов кривизны $k \neq 0$

$$\gamma(t) = \left(t, \frac{k}{2}t^2 + C_1 t + C_3\right).$$

В пространстве Галилея $\mathbf{\Gamma}^3$ также определяются плоские галилеевы циклы кривизны $k \neq 0$ и кручения $m = 0$:

$$\gamma(t) = \left(t, \frac{k}{2}t^2 + C_1 t + C_3, C_2 t + C_4\right).$$

Начальные условия $t = 0, x = d, y = h, \dot{x} = b, \dot{y} = 0$ выделяют цикл кривизны $k \neq 0$:

$$\gamma(t) = \left(t, \frac{k}{2}t^2 + bt + d, h\right).$$

Если $c \neq 0$, то общее решение системы дифференциальных уравнений (8) таково:

$$\gamma(t) = \left(t, \frac{k\cos\ c}{2}t^2 + C_1 t + C_3, \frac{k\sin\ c}{2}t^2 + C_2 t + C_4\right).$$

При начальных условиях $t = 0, x = d, y = 0, \dot{x} = b, \dot{y} = 0$ получается цикл

$$\gamma(t) = \left(t, \frac{k\cos\ c}{2}t^2 + bt + d, \frac{k\sin\ c}{2}t^2\right);$$

при начальных условиях $t = 0, x = d, y = 0, \dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ имеем мировую линию движущейся точки:

$$\gamma(t) = \left(t, \frac{k\cos\ c}{2}t^2 + d, \frac{k\sin\ c}{2}t^2\right),$$

ее евклидова проекция, т.е. траектория движения, есть прямая

$$y = x\operatorname{tg} c + d$$

с угловым коэффициентом $\operatorname{tg} c$.

Траектория 3. $k \neq 0$, $m \neq 0$.

В этом случае

$$w = \int m dt = mt + c,$$

и уравнения (13) имеют вид

$$\ddot{x} = k\cos(mt + c), \ \ddot{y} = k\sin(mt + c). \tag{18}$$

Определяется семейство 5-параметрических кривых

$$\gamma(t) = \left(t, -\frac{k}{m^2}\cos(mt + c) + C_1 t + C_3, -\frac{k}{m^2}\sin(mt + c) + C_2 t + C_4\right). \tag{19}$$

Репер пространства Галилея $\mathbf{\Gamma}^3$ можно выбрать так, что $C_i = 0$. Мировые линии движущейся точки

$$\gamma(t) = \left(t, -\frac{k}{m^2}\cos(mt + c), -\frac{k}{m^2}\sin(mt + c)\right) \tag{20}$$

являются винтовыми линиями на круглом цилиндре. Направляющая цилиндра, она же траектория движения точки, есть окружность евклидовой плоскости

$$x^2 + y^2 = \frac{k^2}{m^4}$$

радиуса $r = \dfrac{k}{m^2}$, образующая параллельно оси времени $< O, \vec{e} >$.

При движении материальной точки в евклидовой плоскости по траектории

$$\vec{r}(t) = \left(-\frac{k}{m^2}\cos(mt + c), -\frac{k}{m^2}\sin(mt + c)\right), \tag{21}$$

полученной проектированием (20) на евклидову плоскость, величина m есть угловая скорость движения, c – начальная фаза. Вектор скорости равен

$$\vec{v} = \left(\frac{k}{m}\sin(mt + c), -\frac{k}{m}\cos(mt + c)\right),$$

его величина

$$|\vec{v}| = \frac{k}{|m|}.$$

Вектор ускорения движущейся точки:

$$\vec{a} = (k\sin(mt + c), k\cos(mt + c)),$$

величина ускорения есть

$$|\vec{a}| = k ,$$

$\frac{1}{k}$ – это галилеева кривизна траектории движения точки.

Если $\vec{a} = \vec{a}(t) = (a^1, a^2)$, то его составляющие есть колебания

$$a^1 = k\sin(mt + c), a^2 = k\cos(mt + c)$$

во взаимно перпендикулярных направлениях $\vec{i}$ и $\vec{j}$ с одинаковыми амплитудами k, одинаковыми частотами m и разными начальными фазами, соответственно, $c + \frac{\pi}{2}$ и c. Сумма колебаний, составляющих ускорение, описывает фазовую кривую – окружность

$$x^2 + y^2 = k^2 ,$$

и определяет траекторию (21) с уравнением

$$x^2 + y^2 = \frac{k^2}{m^4} .$$

Мировая линия движения точки есть линия (20).

Начальные условия

$$t = 0, x = -\frac{k}{m}, y = 0, \dot{x} = b, \dot{y} = \frac{k}{m}$$

выделяют из семейства (19) линию (20), а при $c = 0, m = 1$ начальные условия

$$t = 0, x = 0, y = 0, \dot{x} = 0, \dot{y} = 0$$

выделяют из (19) кривую, которая проектируется на евклидову плоскость $< O, \vec{i}, \vec{j} >$ в циклоиду

$$x = k(1 - \cos t) , \ y = k(t - \sin t) .$$

Траектория движения точки с мировой линией (19) есть указанная циклоида. В работе [4, с. 799] отмечено, что винтовая линия может проектироваться на циклоиду.

Компоненты ускорения движущейся точки являются колебаниями. Закон движения точки определяется как сумма колебаний. Это совместное воздействие колебаний на точку задает движение точки по окружности или по циклоиде.

2.2 Кривизна и кручение траектории являются рациональными функциями

Траектория 4. $k = t$, $m = 0$.

Находим $w = \int m dt = c$, тогда

$$\ddot{x} = t\cos c , \ \ddot{y} = t\sin c,$$

значит,

$$x=\frac{t^3}{6}\cos c+C_1t+C_3,\ y=\frac{t^3}{6}\sin c+C_2t+C_4. \quad (22)$$

При $c\neq 0$ и начальных условиях $t=0, x=0, y=b, \dot{x}=0, \dot{y}=0$ по (22) получаем галилееву кривую – мировую линию движения:

$$\gamma(t)=\left(t,\frac{t^3}{6}\cos c,\frac{t^3}{6}\sin c\right),$$

евклидова проекция которой – траектория движения, есть прямая $y=x\,\mathrm{tg}\,c+b$. Если $c=0$, то приходим к дифференциальным уравнениям

$$\ddot{x}=k,\ \ddot{y}=0,$$

тогда

$$x=\frac{t^3}{6}+C_1t+C_3,\ y=C_2t+C_4.$$

Начальные условия $t=0, x=0, y=0, \dot{x}=0, \dot{y}=C_2^{-1}$ при $C_2\neq 0$ выделяют мировую линию движения точки

$$\gamma(t)=\left(t,\frac{t^3}{6},t\right),$$

евклидова проекция (траектория движения) которой

$$x=\frac{y^3}{6}.$$

Траектория 5. $k^2=\dfrac{9a^2+b^2t^2}{36}$, $m=\dfrac{3ab}{9a^2+b^2t^2}$.

Согласно (12)

$$w(t)=\int\frac{3ab\,dt}{9a^2+b^2t^2}=arc\ \ tg\frac{bt}{3a}+c.$$

По формуле (13)

$$\ddot{x}=\frac{\sqrt{9a^2+b^2t^2}}{6}\cos\left(\mathrm{arctg}\frac{bt}{3a}+c\right),\ \ddot{y}=\frac{\sqrt{9a^2+b^2t^2}}{6}\sin\left(\mathrm{arctg}\frac{bt}{3a}+c\right).$$

При $c=0$ имеем

$$\cos\left(\mathrm{arctg}\frac{bt}{3a}\right)=\pm\frac{3a}{\sqrt{9a^2+b^2t^2}},\ \sin\left(\mathrm{arctg}\frac{bt}{3a}\right)=\pm\frac{bt}{\sqrt{9a^2+b^2t^2}}.$$

Следовательно, при $c=0$

$$\ddot{x}=\frac{a}{2},\ \ddot{y}=\frac{bt}{6}.$$

Это равносильно разложению функции k^2 на сумму квадратов: $k^2 = = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2t^2}{36}$. Общие интегралы полученных уравнений таковы:

$$x = \frac{at^2}{4} + C_1t + C_3,\ y = \frac{bt^3}{36} + C_2t + C_4.$$

Начальные условия $t = 0, x = 0, y = 0, \dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ в случае $a = 4, b = 36$ выделяют функции $x = t^2$, $y = t^3$. Получена галилеева кривая – мировая линия движения:

$$\gamma(t) = (t, t^2,\ t^3),$$

ее евклидова проекция – траектория движения, есть $\vec{r}(t) = (t^2,\ t^3)$ или

$$y = \sqrt[3]{x^2}\ –$$

полукубическая парабола.

Траектория 6. $k = \frac{\sqrt{2}}{t}$, $m = \frac{1}{t}$.

По формуле (12)

$$w(t) = \int \frac{dt}{t} = \ln t + c.$$

Согласно (13)

$$\ddot{x} = \frac{\sqrt{2}}{t}\cos(\ln t + c),\ \ddot{y} = \frac{\sqrt{2}}{t}\sin(\ln t + c).$$

После первого интегрирования имеем

$$\dot{x} = \sqrt{2}\sin(\ln t + c),\ \dot{y} = \sqrt{2}\cos(\ln t + c).$$

В результате замены $\ln t + c = u$ приходим к выражениям

$$\dot{x} = \sqrt{2}e^u \sin u + C_1,$$

$$\dot{y} = \sqrt{2}e^u \cos u + C_2;$$

тогда уравнения траектории примет вид

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}t(\cos(\ln t + c) - \sin(\ln t + c)) + C_1t + C_3;$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}t(\cos(\ln t + c) + \sin(\ln t + c)) + C_2t + C_4. \qquad (23)$$

Рассмотрим альтернативное решение. Используя разложение

$$k^2 = \frac{2}{t^2} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2},$$

можно принять

$$\ddot{x} = -\frac{1}{t}(\cos(\ln t + c) - \sin(\ln t + c)),\ y = \frac{1}{t}(\cos(\ln t + c) - \sin(\ln t + c))\,. \qquad (24)$$

При этом выполняются соотношения

$$\ddot{x}\dddot{y} - \dddot{x}\ddot{y} = \frac{2}{t^3} \text{ и } m = \frac{1}{t},$$

т.е. функции (24) удовлетворяют второму уравнению системы (8).

Интегрируя дважды выражения (24), получаем

$$x = t\cos\ln t + C_1 t + C_3,\ \ y = t\sin\ln t + C_2 t + C_4\,.$$

Эти значения немного проще, чем (23). При $c = 0$ и начальных условиях $t = 1, x = 0, y = 0, \dot{x} = 1, \dot{y} = 1$ имеем галилееву кривую – мировую линию движения точки

$$\gamma(t) = (t, t\cos\ln t,\ \ t\sin\ln t)\,,$$

с евклидовой проекцией – траекторией движения:

$$\vec{r}(t) = (t\cos\ln t,\ \ t\sin\ln t)\,.$$

Получились две различные параметризации одной кривой – два разных закона движения точки по траектории. Различные колебания, суммируясь, дают одну и ту же траекторию движения точки.

В последней функции выполним замену $\ln t = v$, тогда $t = e^v$. Получаем пространственную кривую $\gamma(v) = (e^v, e^v\cos v, e^v\sin v)$. Заменим обозначение параметра v на t:

$$\gamma(t) = (e^t, e^t\cos t, e^t\sin t)\,.$$

Это коническая спираль [5, задача № 420]. Если смысл параметра t в задании мировой линии движения $\gamma(t) = (t, t\cos\ln t, t\sin\ln t)$ есть время, то имеется движение точки с двумя степенями свободы с законом $\vec{r}(t) = (t\cos\ln t, t\sin\ln t)$. Если для рассматриваемой галилеевой кривой $\gamma(t)$ параметр t имеет пространственный смысл и он может быть задан как функция времени $t = e^v$ (смысл параметра v есть время), то получаем траекторию движения с тремя степенями свободы: $\vec{r}(t) = (e^t, e^t\cos t, e^t\sin t)$. Но в этом случае условие $k = \frac{\sqrt{2}}{t}$, $m = \frac{1}{t}$ задает не ускорение движущейся точки или же величину ускорения не во времени, а в зависимости от пространственного параметра.

Траектория 7. $k = \sqrt{1 + t^2}$, $m = \dfrac{2 + t^2}{1 + t^2}$.

На основе разложения $k^2 = 1 + t^2$, полагая $\ddot{x} = \cos t - t\sin t$, $\ddot{y} = \sin t + t\cos t$ и убедившись в том, что эти функции удовлетворяют второму уравнению системы (8), находим

$$x=\cos t+t\sin t+C_1t+C_3\,,\ \ y=\sin t-t\cos t+C_2t+C_4\,.$$

Начальные условия $t=0, x=0, y=0, \dot{x}=0, \dot{y}=0$ определяют галилееву кривую – мировую линию движения точки:

$$\gamma(t)=(t,\cos t+t\sin t,\, t\sin t-\cos t)\,,$$

траектория движения

$$\vec{r}\,(t)=(\cos t+t\sin t,\, t\sin t-\cos t)$$

есть развертка окружности [5, задача № 78].

Находя $w(t)=\int\frac{2+t^2}{1+t^2}dt$, получаем дифференциальные уравнения

$$\ddot{x}=\sqrt{1+t^2}\,\cos(w(t)+c)\,;$$

$$\ddot{y}=\sqrt{1+t^2}\,\sin(w(t)+c)\,,$$

интегрирование которых более затруднительно.

По виду функции $k^2=1+t^2$ возможно разложение величины k^2 в сумму квадратов, и тогда по (15)

$$\ddot{x}=1,\, \ddot{y}=t\,.$$

Подсчитываем:

$$\ddot{x}\,\dddot{y}-\dddot{x}\,\ddot{y}=t\,.$$

При введенных обозначениях второе уравнение системы (8) не удовлетворяется, следовательно, выбранные значения для $\ddot{x},\ddot{y}$ поставленную задачу не решают.

Траектория 8. $k^2=4+t^2$, $m=\frac{6+t^2}{4+t^2}$.

Полагаем

$$\ddot{x}=-2\sin t-t\cos t\,,$$

$$\ddot{y}=2\cos t-t\sin t\,.$$

Одно из решений этих уравнений:

$$\gamma(t)=(t,t\cos t,\, t\sin t)\,,$$

коническая винтовая линия [5, задача № 420, 431]. Траектория точки: $\vec{r}\,(t)=(t\cos t,\, t\sin t)$.

Траектория 9. $k^2=\frac{1+4t^4}{t^4}$, $m=-\frac{4t}{1+4t^4}$.

Разбивая k^2 в сумму квадратов, полагаем

$$\ddot{x}=-\frac{1}{t^2},\, \ddot{y}=2\,.$$

Одно из решений выбранных уравнений дает галилееву кривую

$$\gamma(t) = (t, \ln t, t^2),$$

кривая рассматривается в [5, задача № 488]. Траектория точки: $\vec{r}(t) = (\ln t,\ t^2)$.

Траектория 10. $k^2 = \dfrac{1+t^2}{t^6}$, $m = \dfrac{1}{1+t^2}$.

Здесь

$$w = \operatorname{arctg} t.$$

При $c = 0$

$$\ddot{x} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^3}\cos(\operatorname{arctg} t) = \frac{1}{t^3},\quad \ddot{y} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^3}\sin(\operatorname{arctg} t) = -\frac{1}{t^2}.$$

Получаем семейство кривых

$$\gamma(t) = \left(t, \frac{1}{2t} + C_1 t + C_3, \ln t + C_2 t + C_4 \right),$$

начальные условия $t = 1, x = \dfrac{3}{2}, y = 0, \dot{x} = \dfrac{1}{2}, \dot{y} = 0$ выделяют кривую

$$\gamma(t) = \left(t, \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t}), \ln t \right),$$

траектория движения точки $\vec{r}(t) = \left(\dfrac{1}{2}(t + \dfrac{1}{t}), \ln t \right)$ есть цепная линия [5, задача № 90].

Траектория 11. $k = t, m = \dfrac{1}{t}$.

По формуле (12) $w(t) = \ln t + c$, по (13) $\ddot{x} = t\cos(\ln t + c), \ddot{y} = t\sin(\ln t + c)$. После двукратного интегрирования получаются уравнения траектории:

$$x = \frac{1}{2}t\cos(\ln t + c) + C_1 t + C_3,\quad y = \frac{1}{2}t\sin(\ln t + c) + C_2 t + C_4.$$

Это та же кривая, что и в случае траектории 6, определяемая несколько иначе.

2.3 Кривизна и кручение траектории трансцендентны

Траектория 12. $k^2 = 9(1 - 3\sin^2 t\cos^2 t)$, $m = -\dfrac{2 - 3\sin^2 t\cos^2 t}{1 - 3\sin^2 t\cos^2 t}$.

Функции

$$\ddot{x} = 6\cos t - 9\cos^3 t,\quad \ddot{y} = 6\sin t - 9\sin^3 t$$

таковы, что $\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = k^2$ и удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (8). Получаем в результате интегрирования следующие функции:

$$x = \cos^3 t + C_1 t + C_3 ,$$

$$y = \sin^3 t + C_2 t + C_4 .$$

При $C_i = 0$ имеем мировую линию движения

$$\gamma(t) = (t, \cos^3 t, \sin^3 t) ,$$

траектория движения точки есть астроида

$$\vec{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t) .$$

Астроида в другой параметризации получается при условиях

$$k^2 = \frac{R^2}{2^{11}}(41 + 9\cos t) ,$$

$$m = -\frac{10}{41 + 9\cos t} .$$

Функция k^2 разлагается в сумму квадратов $\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2$, где

$$\ddot{x} = -\frac{R}{2^6}\left(\cos\frac{t}{4} + 9\cos\frac{3t}{4}\right),$$

$$\ddot{y} = \frac{R}{2^6}\left(-\sin\frac{t}{4} + 9\sin\frac{3t}{4}\right),$$

одно из решений:

$$x = \frac{R}{4}\left(\cos\frac{t}{4} + \cos\frac{3t}{4}\right),\ y = \frac{R}{4}\left(\sin\frac{t}{4} - \sin\frac{3t}{4}\right).$$

Эта параметризация астроиды приведена в [6, с. 130]. Функции $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$ есть суммы колебаний, соответственно, в направлениях координатных осей Ox и Oy с различными частотами $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$ с разностью фаз $\frac{\pi}{2}$ в разных направлениях. Амплитуды различны.

Траектория движения материальной точки получается как сумма колебаний с одинаковыми амплитудами, разницей фаз $\frac{\pi}{2}$ и слагаемыми с частотами $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$.

Траектория 13. $k^2 = 4 + e^{2t}$, $m = \dfrac{2e^t}{4 + e^{2t}}$.

Разложение k^2 в сумму квадратов дает $\ddot{x} = 2, \ddot{y} = e^t$. Одно из решений: $x = t^2, y = e^t$. Проекция мировой линии $\gamma(t) = (t,\ t^2, e^t)$ есть траектория из [5, задача № 428].

Траектория 14. $k = \operatorname{ch} 2t, m = \dfrac{1}{\operatorname{ch} 2t}$.

По разложению $\operatorname{ch} 2t = \operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t$ полагаем $\ddot{x} = \operatorname{ch} t, \ddot{y} = \operatorname{sh} t$. Получаем, в частности, кривую $\gamma(t) = (t, \operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$, траектория движения – гипербола $\vec{r}(t) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ [5, задача № 88].

Функции кривизны и кручения мировой линии движения точки в примерах траекторий 11 и 14 связаны одним и тем же соотношением: $m = \dfrac{1}{k}$. Траектории получились различными.

Траектория 15. $k^2 = \dfrac{4}{81}(5 + 4\cos t), m = -3\dfrac{7 + 2\cos t}{5 + 4\cos t}$.

Функция k^2 может быть разложена в сумму квадратов:

$$\ddot{x} = -\frac{2}{9}\left(\cos\frac{t}{3} + 2\cos\frac{2t}{3}\right),$$

$$\ddot{y} = \frac{2}{9}\left(-\sin\frac{t}{3} + 2\sin\frac{2t}{3}\right),$$

решения этих уравнений:

$$x = 2\left(\cos\frac{t}{3} + \cos\frac{2t}{3}\right),\ y = 2\left(\sin\frac{t}{3} - \sin\frac{2t}{3}\right).$$

Получились уравнения траектории движения точки как параметрические уравнения кривой Штейнера [6, с. 124].

Каждая компонента $\ddot{x}, \ddot{y}$ есть сумма колебаний с различными частотами и различными амплитудами. Компоненты x, y есть суммы колебаний с различными частотами и одинаковыми амплитудами. Сумма колебаний во взаимно перпендикулярных направлениях и разницей фаз $\dfrac{\pi}{2}$ дает кривую Штейнера.

3 Траектории движущейся точки и галилеевы кривые

3.1 Получение траектории движущейся точки по мировой линии движения

Пусть мировая линия движущейся материальной точки задана в естественной параметризации, см. (1):

$$\gamma(t) = (t, x(t), y(t)),\ t \in \mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}.$$

Пространственная составляющая мировой линии точки является ее траекторией (см. п. 1.2):

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)). \qquad (25)$$

Если заданы кривизна $k = k(t) \geq 0$ и кручение $m = m(t)$ мировой линии движения точки, то компоненты $x = x(t), y = y(t)$ траектории движущейся точки определяются как решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8). В разд. 2 настоящей работы приведены примеры получения траекторий точки по заданным характеристикам мировой линии движения. В работе [2] обосновано получение уравнений траектории по полю ускорений движущейся точки. В разд. 2 имеются примеры получения траекторий точки по функциям $\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)$ – компонентам поля ускорений.

Некоторые траектории являются результатом сложения колебаний (см. траектории 3, 12, 15) и задаются как колебания.

3.2 Получение траектории движущейся точки по функции ускорения движения и по кривизне траектории

Мировая линия движущейся материальной точки характеризуется кривизной и кручением. Проекция мировой линии точки в евклидову плоскость есть траектория движения точки. Траектория точки характеризуется кривизной. Кривизна мировой линии движения является величиной (модулем) ускорения.

Теорема. *Уравнения траектории движущейся точки определяются функцией ускорения и кривизной траектории.*

Пусть $k^e(t) = k^e > 0$ – кривизна траектории (25) движущейся точки, это кривизна евклидовой кривой. В работе [1] установлена зависимость функции k^e кривизны евклидовой кривой (25) и функций кривизны $k = k(t) \geq 0$ и кручения $m = m(t)$ мировой линии движения точки,

$$kk^e = m^2,$$

(см. [1, с. 67]), отсюда находим

$$m = \pm\sqrt{kk^e}.$$

Теперь компоненты траектории $x = x(t), y = y(t)$ отыскиваются в схеме, изложенной в п. 1.2. Учитывая два знака в формуле для кручения m, получаем два семейства траекторий $\vec{r}(t)$. По заданным начальным условиям выбираем в каждом из семейств кривых одну траекторию.

Функции $k^e(t)$ и $k(t)$ определяют траекторию с точностью до знака кручения мировой линии движения. #

3.3 Использование степенных рядов

В решении некоторых конкретных задач для получения кривой по функциям кривизны и кручения приходится использовать общую схему, однако не всегда выполнимо интегрирование в элементарных функциях. Пусть функции кривизны и кручения таковы:

$$k(t) = \frac{1}{t},\ m(t) = \frac{t}{2};\ t \neq 0.$$

Согласно (12)

$$w(t) = \int \frac{t}{2} dt = t^2 + c.$$

По формуле (13) вводим функции

$$\ddot{x} = \frac{1}{t}\cos(t^2 + c),\ \ddot{y} = \frac{1}{t}\sin(t^2 + c)\ .$$

Решая эти уравнения, получаем галилееву кривую с заданными кривизной и кручением. Введенные функции $\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)$ не интегрируемы в элементарных функциях; используются интегральные синус и косинус. Можно разложить функции $\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)$ в степенные ряды – ряды Тейлора. После интегрирования получаются ряды, сходящиеся на тех же интервалах, что и ряды для функций $\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)$.

3.4 Кривые пространства Галилея

Выше рассмотрено получение координатных уравнений кривых 3-мерного пространства-времени Галилея $\mathbf{\Gamma}^3$ как мировых линий движущейся материальной точки по функциям (7) кривизны и кручения этих кривых, по вектору второй производной (по полю ускорения точки) и по другим условиям. Получены кривые, кривизна и кручение которых совпадают с заданными функциями. Компоненты кривых являются решениями систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Начальные условия указанных систем уравнений выделяют единственную кривую с заданными характеристиками. Тем самым имеется приложение теории кривых пространства Галилея в механике.

Список литературы

1. **Долгарев, А. И.** Классические методы в дифференциальной геометрии одулярных пространств: монография / А. И. Долгарев. – Пенза : Информационно-издательский центр ПензГУ, 2005. – 306 с.
2. **Долгарев, А. И.** Методы одулярной галилеевой геометрии в описании механических движений / А. И. Долгарев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2007. – № 3. – С. 12–24.
3. **Долгарев, А. И.** Кривые 3-мерных вейлевских одулярных пространств и кривые евклидовой плоскости / А. И. Долгарев // Дифференциальная геометрия многообразий фигур : межвуз. тем. сб. научн. тр. – Вып. 33. – Калининград : КГУ, 2002. – С. 25–28.
4. **Выгодский, М. Я.** Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – М. : Физматгиз, 1963. – 872 с.
5. **Белько, И. В.** Сборник задач по дифференциальной геометрии / И. В. Белько, В. И. Ведерников [и др.]. – М. : Наука, 1979. – 272 с.
6. **Савелов, А. А.** Плоские кривые / А. А. Савелов. – М. : Физматгиз, 1960. – 294 с.

Долгарев Артур Иванович
кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет

Dolgarev Artur Ivanovich
Candidate of physico-mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University

E-mail: delivar@yandex.ru

УДК 514.126 + 531

Долгарев, А. И.

Получение траектории движения точки по ее кривизне / А. И. Долгарев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 4 (12). – С. 2–19.